| | |
|---|---|
| Title | On zeta integrals related to Hasse-Weil $L$-functions of elliptic curves (Analytic Number Theory and Related Areas) |
| Author(s) | 鈴木, 正俊 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (2009), 1665: 105-113 |
| Issue Date | 2009-10 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/141048 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

数理解析研究所講究録
第 1665 巻 2009 年 105-113



# On zeta integrals related to Hasse-Weil $L$-functions of elliptic curves

立教大学 理学部 数学教室　鈴木正俊 (Suzuki Masatoshi) [1]
Department of Mathematics, Rikkyo University

## 1. 導入

数論におけるゼータ関数・$L$ 関数の解析的性質を研究するための代表的な方法の一つにゼータ積分と呼ばれるものがある. 岩澤–Tate に始まるゼータ積分の理論はその後保型表現の $L$ 関数や概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論において発展し, ゼータ関数・$L$ 関数の理論に不可欠なものとなっている. 近年, I. Fesenko により今までとは異なる方向へゼータ積分の理論を拡張し, それをスキームのゼータ関数へ応用しようという試みが提唱されている. ここでは彼の理論（の触り）を紹介し, 筆者の得た若干の結果について述べる.

**1.1. Zeta functions of arithmetic schemes.** $\mathbb{Z}$ 上の有限型分離的スキーム $X \to \mathrm{Spec}\,(\mathbb{Z})$ に対し, ゼータ関数 $\zeta_X(s)$ が次の Euler 積により定義される:

$$\zeta_X(s) = \prod_{x \in X_0} \left(1 - |\square(x)|^{-s}\right)^{-1}.$$

ここで $X_0$ は $X$ の閉点全体の集合, $|\square(x)|$ は $x \in X_0$ での剰余体 $\square(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ の位数を表す. 右辺の Euler 積は $\Re(s) > \dim X$ において絶対収束する事が知られている.

また $\zeta_X(s)$ は $\mathbb{C}$ へ有理型に解析接続され, 適当な $\Gamma$ 因子を補って完備化した後, ある標準的な関数等式を持つことが予想されている ([5]).

**1.2. Zeta functions of dimension one schemes.** $k$ を代数体とし, $\mathcal{O}_k$ をその整数環とする. アフィンスキーム $B = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$ は 1 次元スキームの簡単な例の一つである. アフィンスキーム $B$ のゼータ関数は $k$ の Dedekind ゼータ関数に一致する:

$$\zeta_B(s) = \zeta_k(s).$$

Dedekind ゼータ関数の完備化 $\widehat{\zeta}_k(s)$ とその $\Gamma$ 因子は

$$\widehat{\zeta}_k(s) = |d_k|^{s/2}\zeta_{k,\infty}(s)\zeta_k(s), \quad \zeta_{k,\infty}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{r_1}\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{r_2}$$

で与えられる. ここで $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ ($\Gamma(s)$ は $\Gamma$ 関数), $d_k$ は $k$ の判別式, $r_1$ は $k$ の実素点の個数, $2r_2$ は $k$ の複素素点の個数を表す. このとき $\widehat{\zeta}_k(s)$ は $\Re(s) > 1$ において次の積分表示をもつ:

$$\widehat{\zeta}_k(s) = \zeta(f_0, s) = \int_{\mathbb{A}_k^\times} f_0(x)|x|^s d\mu_{\mathbb{A}_k^\times}(x).$$

[1]学振特別研究員 PD

ここで $f_0$ は適当に選ばれた $\mathbb{A}_k$ 上の Schwartz-Bruhat 関数, $|\ |$ はイデール群 $\mathbb{A}_k^\times$ 上の module, $d\mu_{\mathbb{A}_k^\times}$ は適当に正規化された $\mathbb{A}_k^\times$ 上の Haar 測度である. 左辺に現れる積分

$$\zeta(f,s) = \int_{\mathbb{A}_k^\times} f(x)|x|^s d\mu_{\mathbb{A}_k^\times}(x)$$

は（$\mathbb{A}_k$ 上の）ゼータ積分と呼ばれる.

Dedekind ゼータ関数 $\zeta_k(s)$ の基本的な解析的性質（解析接続, 関数等式, 極の位置・位数・留数等）はゼータ積分を通して局所コンパクト群 $\mathbb{A}_k$ 上の Fourier 解析から得られる ([12], 又は [6] 等). 以下, 簡単にそれを復習しよう.

まずゼータ積分 $\zeta(f,s)$ を $\Re(s) > 1$ において次の様な和に分解する:

$$\zeta(f,s) = \xi(f,s) + \xi(\widehat{f}, 1-s) + \omega_f(s).$$

ここで $\widehat{f}$ は $f$ の $\mathbb{A}_k$ 上の Fourier 変換で,

$$\xi(f,s) := \int_{x\in\mathbb{A}_k^\times, |x|\geq 1} f(x)\,|x|^s\, d\mu_{\mathbb{A}_k^\times}(x) = \int_1^\infty \left\{ \int_{\mathbb{A}_k^1} f(x\gamma)\, d\mu_{\mathbb{A}_k^1}(\gamma) \right\} x^s \frac{dx}{x}$$

$$\omega_f(s) := \int_{x\in\mathbb{A}_k^\times, |x| \square 1} \left( f(x) - |x|^{-1}\widehat{f}(x^{-1}) \right) |x|^s d\mu_{\mathbb{A}_k^\times}(x)$$

($\mathbb{A}_k^\times = (0,\infty) \times \mathbb{A}_k^1$, $\mathbb{A}_k^1 = \{x \in \mathbb{A}_k\,;\, |x| = 1\}$). このとき $\xi(f,s)$, $\xi(\widehat{f}, 1-s)$ は全ての Schwartz-Bruhat 関数 $f$ に対し整関数となるから, ゼータ積分の解析接続と関数等式は $\omega_f(s)$ のそれと同等である.

対角的埋め込み $k \hookrightarrow \mathbb{A}_k$ により $k$ は $\mathbb{A}_k$ の離散部分群を成す. 組 $(\mathbb{A}_k, k)$ に対する Poisson の和公式により $\omega_f(s)$ は

$$\omega_f(s) = \int_0^1 h_f(x)\, x^s \frac{dx}{x},$$

$$h_f(s) = -\int_{\gamma\in\mathbb{A}_k^1/k^\times} \int_{\beta\in\partial k^\times} \left( f(x\gamma\beta) - x^{-1}\widehat{f}(x^{-1}\gamma\beta)^{s-1} \right) d\mu(\beta)\, d\mu(\gamma)$$

と計算される. $\mathbb{A}_k^\times$ の離散部分群 $k^\times$ の境界上の積分が現れる事にちなんで, $h_f(s)$ をゼータ積分 $\zeta(f,s)$ の boundary term と呼ぶ. 境界 $\partial k^\times$ 上の積分が現れるのは Poisson の和公式の帰結である. 今の場合, $\partial k^\times$ は一点 $\{0\}$ から成り, boundary term $h_f(s)$ は

$$h_f(x) = -\mu(\mathbb{A}_k^1/k^\times)\left( f(0) - x^{-1}\widehat{f}(0) \right)$$

となる事が分かる. これにより $\omega_f(s)$ は全平面に解析接続され, $(f,s) \mapsto (\widehat{f}, 1-s)$ に関して対称である事が分かる. これによりゼータ積分 $\zeta(f,s)$ の解析接続と関数等式が得られる. また極の位置やその位数, 留数等も分かる.

ある Schwartz-Bruhat 関数 $f_0$ に対して $\widehat{\zeta}_k(s) = \zeta(f_0, s)$ であったから, ゼータ積分に関する議論により, Dedekind ゼータ関数の解析接続と関数等式, 極の位置とその位数, 留数等が得られた事になる. この様にしてゼータ積分から Dedekind ゼータ関数（一次元スキーム Spec $\mathcal{O}_k$ のゼータ関数）の解析的性質が得られる.

岩澤-Tate により $\mathbb{A}_k^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_k)$ の場合に創始されたゼータ積分の理論は, $GL_n$, またより一般の代数群 $G$ 上のゼータ積分の理論に拡張され, $G(\mathbb{A}_k)$ の保型表現の $L$ 関数の解析接続や関数等式の証明に用いられてきた. 可換群 $GL_1$ から非可換群 $G$ への拡張は一つの自然な流れではあるが, ここでそれとは異なる一般化に注目しよう.

**1.3. Zeta functions of dimension two schmemes.** Dedekind ゼータ関数は一次元スキーム $B = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$ のゼータ関数であった. そして Dedekind ゼータ関数の基本的性質は $\mathbb{A}_k$ 上のゼータ積分から得られた. アデール環 $\mathbb{A}_k$ を一次元スキーム $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$ に対応する対象と考えれば, 高次元スキーム $X$ に対応するアデール的対象 $\mathbb{A}_X$ があって, ゼータ関数 $\zeta_X(s)$ をその $\mathbb{A}_X$ 上の（高次元）ゼータ積分を用いて研究しようという視点は自然である. これを体 $k$ 上のある代数曲線のモデルとなっている二次元スキームに対して実現したのが Fesenko [1, 2] の二次元ゼータ積分の理論である. これは特に対象とする二次元スキームが楕円曲線の regular model の場合に詳しく研究されている. Fesenko は $k$ が正標数の場合も扱っているが, ここでは標数 0 の場合に限定して話を進める.

$E$ を代数体 $k$ 上定義された楕円曲線とし, $\mathcal{E} \to B = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_k$ を $E$ の $k$ 上の regular proper model とする. このとき二次元スキーム $\mathcal{E}$ のゼータ関数は

$$\zeta_{\mathcal{E}}(s) = n_{\mathcal{E}}(s)\zeta_E(s), \quad \zeta_E(s) = \frac{\zeta_k(s)\zeta_k(s-1)}{L(E,s)} \tag{1.1}$$

と表される事が分かる（[1, section 47]). ここで $n_{\mathcal{E}}(s)$ は $\mathcal{E} \to B$ の singular fibres から定まる有限 Euler 積 [2]

$$n_{\mathcal{E}}(s) = \prod_{1 \Box j \Box J_{\mathcal{E}}} \left(1 - q_j^{1-s}\right)^{-1}, \tag{1.2}$$

$L(E,s)$ は $E$ の Hasse-Weil $L$ 関数である. $L(E,s)$ は整関数に解析接続され, 適当な $\Gamma$ 因子をかけて完備化された $\widehat{L}(E,s)$ は関数等式 $\widehat{L}(E,s) = \omega_E \widehat{L}(E, 2-s)$ ($\omega_E \in \{\pm 1\}$) を満たす事が予想されている.

$S$ を $\mathcal{E} \to B$ 上の有限個の horizontal curves と全ての vertical curves から成る集合とする. $\mathcal{E}$ 上の曲線 $y$ と曲線 $y$ 上の一点 $x \in y$ に対し二次元局所体 $K_{x,y}$ が定まる[3]. $\mathcal{O}_{x,y}$ で $K_{x,y}$ の付値環を表す. このとき二次元アデール $\mathbf{A}_{\mathcal{E}}$, $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ が概ね

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}} = \prod_{y \in \mathcal{E}}{}' \prod_{x \in y}{}' K_{x,y} \quad \supset \quad \mathbb{A}_{\mathcal{E},S} = \prod_{y \in S}{}' \prod_{x \in y}{}' \mathcal{O}_{x,y}$$

により定義される. ここで $\prod'$ は $K_{x,y}$ の integral structure に関するある制限直積を表す. 正確な定義は [1, 2] を参照して欲しい. 二次元局所体 $K_{x,y}$ には階数 1 の integral structure $\mathcal{O}_{x,y}$ の他に, 階数 2 の integral structure $O_{x,y}$ がある. $\mathbf{A}_{\mathcal{E}}$ は階数 1 の integral structure に, $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ は階数 2 の integral structure に対応している. また幾何的には $\mathbf{A}_{\mathcal{E}}$ は 1-サイクル（$\mathcal{E}$ の因子）に, $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ は 0-サイクルに対応している.

---

[2] $q_j =$ 素数冪, $j \neq j'$ に対し $q_j \neq q_{j'}$ とは限らない. また常に $J_{\mathcal{E}} \geq 1$.

[3] 高次元局所体は 0 次元局所体を有限体として, 次の様に帰納的に定義される: $F$ が $n$ 次元局所体であるとは, $F$ が完備離散付値体かつその剰余体が $(n-1)$ 次元局所体である事を言う. 通常局所体と呼ばれているものは一次元局所体にあたる.

位相群上の積分論において重要なのは並行移動不変測度（Haar 測度）の存在だが，$\mathbf{A}_{\mathcal{E}}$ においてはその様な測度は定義されない．しかし少し小さい $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ に対しては平行不変測度が存在する．これは $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}^{\times}$ に関しても同様である．これを用いて，二次元ゼータ積分 $\zeta_{\mathcal{E},S}(f,s)$ が次の積分で定義される:

$$\zeta_{\mathcal{E},S}(f,s)=\int_{T_{\mathcal{E},S}} f(t)[t]^s d\mu_T(t),$$

ここで $f$ は $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}\times\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ 上の（一般化された）Schwartz-Bruhat 関数，$T_{\mathcal{E},S}$ は $T_{\mathcal{E},S}=\prod'_{y\in S}T_y$ で定義される $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}^{\times}\times\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}^{\times}$ の部分群で殆ど全ての $y\in S$ に対し [4] $T_y=\mathbb{A}_y^{\times}\times\mathbb{A}_y^{\times}$ ($\mathbb{A}_y:=\prod'_{x\in y}\mathcal{O}_{x,y}$)，$d\mu_T$ はある $T_{\mathcal{E},S}$ 上の不変測度，$[\ ]:T_{\mathcal{E},S}\to\mathbb{R}_+^{\times}$ は twisted module と呼ばれる不変測度から定まる通常の module を少し変形したものである．二次元ゼータ積分の正確な定義は [1, 2] を参照して欲しい．

テスト関数 $f_0$ を適当に選ぶ事により，

$$\zeta_{\mathcal{E},S}(f_0,s)=\prod_{1\Box i\Box I_{\mathcal{E},S}}\widehat{\zeta}_{k_i}(s/2)^2\cdot c_{\mathcal{E}}^{1-s}\zeta_{\mathcal{E}}(s)^2 \tag{1.3}$$

を得る．ここで $c_{\mathcal{E}}$ は $\mathcal{E}\to B$ の singular fibres から定まるある正整数 ([1, Theorem 40, Theorem 47])．従って二次元ゼータ積分の解析接続と関数等式は $\mathcal{E}$ のゼータ関数 $\zeta_{\mathcal{E}}(s)$ の解析接続と関数等式を導く．一次元ゼータ積分の場合と同様に，二次元ゼータ積分は $\Re(s)>2$ において

$$\zeta_{\mathcal{E},S}(f,s)=\xi(f,s)+\xi(\widehat{f},2-s)+\omega_f(s),$$

の形の和に分解され，$\xi(f,s)$, $\xi(\widehat{f},2-s)$ は全ての Schwartz-Bruhat 関数 $f$ に対し整関数となる事が分かる．従って二次元ゼータ積分 $\zeta_{\mathcal{E},S}(s)$ の解析接続，関数等式，極の位置等の解析的性質は $\omega_f(s)$ のそれと同等である．

ここで注目すべきことは，(1.1) と (1.3) により，$\omega_f(s)$ の極の位置に関する結果は $L(E,s)$ の零点に関する情報を与えるという事である．即ち，

**$\omega_f(s)$ の極の決定は $L(E,s)$ の Riemann 予想に直結している!**

これは一次元ゼータ積分には無かった特徴である．

谷山–志村–Weil 予想によれば，$L(E,s)$ は $GL_2(\mathbb{A}_k)$ のある正則カスプ表現 $\pi$ に付随する $L$ 関数 $L(\pi,s)$ に（平行移動の差を除いて）一致すると予想されている．これを認めれば $L(E,s)$ の解析接続や関数等式は $GL_2(\mathbb{A}_k)$ の一次元ゼータ積分を用いて導く事ができる．しかしながら，$GL_2(\mathbb{A}_k)$ のゼータ積分は $L(E,s)$ の零点に関しては（現在知られている理論の範囲では）何の情報も与えない．$L$ 関数 $L(E,s)$ の代わりにゼータ関数 $\zeta_{\mathcal{E}}(s)$ に注目し，それを二次元ゼータ積分 $\zeta_{\mathcal{E},S}(s)$ を通して考察する事で，$L(E,s)$ の零点を $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ 上の調和解析を用いて研究する事が可能になったのである．

---

[4] $y\in S$ が horizontal curve か smooth な vertical curve のとき

## 2. 結果

以下 $k = \mathbb{Q}$ とし, テスト関数 $f_0$ を (1.3) の様に選んで

$$\omega_{\mathcal{E}}(s) = \omega(f_0, |\ |_2^s).$$

と表す. このとき $\omega_{\mathcal{E}}(s)$ は $(0,\infty)$ 上のある実数値関数 $h_{\mathcal{E}}(x)$ (boundary term) によって

$$\omega_{\mathcal{E}}(s) = (\text{const.}) \times \int_0^1 h_{\mathcal{E}}(x)\, x^{s-2} dx \quad (\Re(s) > 2) \tag{2.1}$$

と積分表示される. 更にある 3 次多項式 $P_{\mathcal{E}}(t)$ が存在して

$$h_{\mathcal{E}}(x) - P_{\mathcal{E}}(\log(1/x)) \to 0 \quad (x \to +0).$$

であることが分かる. ここで $(0,\infty)$ 上の実数値関数 $Z_{\mathcal{E}}$ を

$$Z_{\mathcal{E}}(x) = \left(-x\frac{d}{dx}\right)^4 h_{\mathcal{E}}(x).$$

で定める. 次の命題から $Z_{\mathcal{E}}(x)$ の $x = 0$ 近辺での挙動は $L(E,s)$ の零点の分布と密接に関係している事が分かる.

**命題 1** (Fesenko [1]). 次の二つを仮定する:

(1) ある正定数 $x_0$ が存在して, $Z_{\mathcal{E}}(x)$ の値は $(0, x_0)$ 上で一定符号,

(2) $L(E,s)$ は開区間 $(1,2)$ 上に零点を持たない.

このとき

$$\zeta(s/2)\frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{L(E,s)}$$

の全ての極は $L(E,s)$ の関数等式の中心線 $\Re(s) = 1$ 上にある. 特に $\zeta(s)$ の Riemann 予想を仮定すれば, $L(E,s)$ の零点は全て $\Re(s) = 1$ 上にある.

従って $Z_{\mathcal{E}}(x)$ が $x = 0$ の近傍で一定符号であるという条件は仮定 (2) と $\zeta(s)$ の Riemann 予想の下で $L(E,s)$ の Riemann 予想の十分条件を与えている[5]. 逆に $Z_{\mathcal{E}}(x)$ の定符号性は (適当な仮定の下で) $L(E,s)$ の Riemann 予想の必要条件でもある事が分かる.

**定理 1.** $E$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線とする. このとき $E$ は modular だから $L(E,s)$ は整関数である. いま $L(E,s)$ の全ての零点は関数等式の中心線 $\Re(s) = 1$ 上にあり, しかも $s = 1$ を除いて全て一位の零点であると仮定する. また $L(E,s)$ の零点に対し

$$\sum_{0<\Im(\rho)\Box T} |L'(E,\rho)|^{-2} = O(T). \tag{2.2}$$

が成り立つと仮定する. ここで $\rho$ は $0 < \Im(\rho) \le T$ を満たす $L(E,s)$ の $\Re(s) = 1$ 上の全ての零点を渡るものとする. $r_E \ge 0$ で $L(E,s)$ の $s = 1$ における零点の位数を表し, $J'_{\mathcal{E}}$ $(\le J_{\mathcal{E}})$ で (1.2) の Euler 積に現れる $q_j$ の重複度の最大値を表す. このとき $Z_{\mathcal{E}}(x)$ の $x = 0$ 近傍での挙動について次が成り立つ.

---

[5]楕円曲線 $E/\mathbb{Q}$ の導手が小さい場合, 仮定 (2) は計算機を用いて確かめる事ができる ([8]).

(1) $r_E \geq 1$ または $J_{\mathcal{E}} \geq J'_{\mathcal{E}}+1$ のとき、ある正数 $x_{\mathcal{E}}>0$ が存在して $Z_{\mathcal{E}}(x)$ は $(0, x_{\mathcal{E}})$ 上で常に負の値をとる．より詳しく，$x \to 0^+$ のとき

$$Z_{\mathcal{E}}(x) = -C\,x\,|\log x|^{2(r_E+J_{\mathcal{E}})+1}\big(1+O(\frac{1}{|\log x|})\big) \quad (x \to 0^+)$$

が成り立つ．ここで $C$ はある正定数である．

(2) $r_E=0$ かつ $J_{\mathcal{E}}=J'_{\mathcal{E}}$ のとき，

$$Z_{\mathcal{E}}(x) = -(C+v(x))\,x|\log x|^{2J_{\mathcal{E}}+1}\,\big(1+O(\frac{1}{|\log x|})\big) \quad (x \to 0^+)$$

が成り立ち，$v(x)=O(1)$．更に $n_{\mathcal{E}}(s)^{-1}$ と $L(E,s)$ が共通零点を持たないと仮定すれば，$v(x)=O(|\log x|^{-1})$．

**注 1.** 評価 (2.2) は Riemann ゼータ関数に対して予想されている評価

$$\sum_{0<\gamma\leq T} |\zeta'(\rho)|^{-2k} = O(T(\log T)^{(k-1)^2}) \quad (k \in \mathbb{R}), \tag{2.3}$$

の類似である．但し Riemann 予想と全ての零点が一位であるという仮定を置いている．評価 (2.3) は Gonek [3] と Hejhal [4] により異なる動機から独立に予想された．$f$ を重さ $k>1$，レベル $N$ の上半平面上の正規化された Hecke 同時固有形式とする．Murty と Perelli は [7] において $L(f,s)$ の Riemann 予想と pair correlation 予想を仮定すれば $L(f,s)$ の殆ど全ての零点は一位である事を証明した．Wiles 等により証明された $\mathbb{Q}$ 上の志村–谷山–Weil 予想に従えば，これは $L(E,s)$ の Riemann 予想と pair correlation 予想を仮定すれば $L(E,s)$ の殆ど全ての零点は一位である事が分かる．

**注 2.** 定理 1 (2) において $|v(x)|<C$ と予想される．実際，幾つかの具体例では $|v(x)|<C$ となっている．

*Proof.* [10] の Proposition 4 の証明を $n_{\mathcal{E}}(s)$ の極を考慮して若干変更すればよい． □

命題 1 と定理 1 により $Z_{\mathcal{E}}(x)$ の $x=0$ の近傍における定符号性は $L(E,s)$ の Riemann 予想と同値に近い条件である事が分かる．$Z_{\mathcal{E}}(x)$ の $x=0$ 近傍での挙動について得られた結果は次の通り．

**定理 2** ([10]). $E$ を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とし，数列 $A(n)$ を Dirichlet 級数

$$c_{\mathcal{E}}^{1-s}\zeta_{\mathcal{E}}(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A(n)\,n^{-s/2}$$

で定義する．このとき $Z_{\mathcal{E}}(x)$ は

$$Z_{\mathcal{E}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A(n) Z_n(x) \tag{2.4}$$

と展開され，各 $Z_n(x)$ に対し

$$Z_n(x) = \begin{cases} 32\,x^2\log x + 16\,x^2\log(nQ) + O(x^{2+2N}) & (x \to 0^+), \\ 32\,n^{-1}x^2\log x + 16\,n^{-1}x^2\log(nQ) + O(x^{-2N}) & (x \to +\infty) \end{cases}$$

が任意に固定された $N>0$ に対して成り立つ．ここで $Q=e^{\gamma+4}/4\pi$．更に与えられた実数 $R>1$ と正整数 $n_0$，任意の正整数 $n$ に対し次が成り立つ

$$Z_n(x)=\frac{n_0}{n}\,Z_{n_0}\Big(x\sqrt{\frac{n}{n_0}}\,\Big)+O\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad x\sqrt{\frac{n}{n_0}}\leq R<1. \tag{2.5}$$

これより各 $Z_n(x)$ は $x=0$ の近傍で負である事が分かる．各 $A(n)$ は非負なので，これで $Z_{\mathcal{E}}(x)$ の $x=0$ 近傍での定符号性が得られたかというとそうではない．$Z_n(x)$ の主要項に関する和は収束しないので，$Z_{\mathcal{E}}(x)$ の $x=0$ 近傍での挙動を決定するにはもっと詳しく調べる必要がある．関係式 (2.5) における誤差項をもっと精密に評価できれば (2.4) とそれを組み合わせて $Z_{\mathcal{E}}(x)$ の $x=0$ 近傍での挙動が分かるのだが，現在の所それはできていない．

展開式 (2.4) から $x\to 0^+$ において寄与の小さい項を除いてやると次の様になる．数値実験等をするにはそれを有限項で切ったものを用いるのがよい．

**定理 3** ([10])**.** 数列 $B(n)$ を定理 2 の $A(n)$ と約数関数 $\tau(n)=\sum_{d|n}1$ を用いて

$$B(n)=\sum_{d|n}A(d)\,\tau(n/d),$$

と定義する．このとき任意に固定された $N>0$ に対し

$$Z_E(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(n)}{n}\mathsf{K}(2\pi nx^2)+O(x^N)\quad (x\to 0^+)$$

が成り立つ．ここで

$$\mathsf{K}(t)=(16t^5+288t^3+16t)K_0(t)-(128t^4+64t^2)K_1(t)$$

で $K_\nu(t)$ は $K$-Bessel 関数を表す．また与えられた $0<\varepsilon<1$, $R>1$ と $\alpha\beta<\varepsilon$ を満たす任意の $0<\alpha<1$, $\beta>1$ について

$$Z_E(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n\,\Box\,Rx^{-2-\alpha}}\frac{B(n)}{n}\,K(2\pi nx^2)+O(x^{\alpha\beta-\varepsilon}).$$

**注 3.** 導手の小さい $E/\mathbb{Q}$ に対する数値実験では $R$ の選択は $R=20$ 程度が良い．

定理 2 と定理 3 は次の定理 4 の帰結である．

**定理 4** ([10])**.** (2.1) の被積分関数 $h_{\mathcal{E}}(x)$ (boundary term) は

$$h_{\mathcal{E}}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A(n)V_n(x).$$

と展開される．ここで $V_n(x)$ は $K$-Bessel 関数と約数関数により

$$V_n(x)=4\sum_{m=1}^{\infty}\tau(m)\big[K_0(2\pi mnx^{-2})-x^2K_0(2\pi mnx^2)\big]$$

と表される．

実はこれ等の結果（定理 1〜 定理 4）は $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ の理論を経由しないで証明できる（由来は $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ 上の二次元ゼータ積分にあるのだが）. そして定理 4 の結果は $\mathbb{A}_k$ 上のゼータ積分でいうと $\omega_f(s)$ に対して Poisson の和公式を用いる前の積分表示に対応している事が分かる. 定理 2, 3 は定理 4 から導かれ, それでは $Z_{\mathcal{E}}(x)$ の $x=0$ 近傍での定符号性の証明には至っていない訳だが, これ等の結果には $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ の duality（theta formula）が反映されていないと分かればそれも当然かと思える.

$\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}\times\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ の theta formula を用いると $h_{\mathcal{E}}(x)$ は $\mathbb{A}_k$ 上のゼータ積分の場合と同様に $T_{\mathcal{E},S}\subset\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}^{\times}\times\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}^{\times}$ のある離散部分群 $T_0$ の境界上の積分で表されるが, 現在の所それを定理 4 の程度まで明示的に書き下す表示は知られていない. また $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}\times\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ の theta formula は定理 4 の $h_{\mathcal{E}}(x)$ の表示式にも内在しているはずであるが, それがどういう形で含まれているのかは今の所不明である. 一次元ゼータ積分の場合と違って $T_0$ の境界は一点でなくしかもかなり大きい（連続濃度を持つ）. $T_0$ の境界に関するこれからの研究が $Z_{\mathcal{E}}(x)$ の $x=0$ 近傍での定符号性（$\fallingdotseq L(E,s)$ の Riemann 予想）を説明してくれるのを期待したい. $T_0$ は次節で述べる $h_{\mathcal{E}}(x)$ の mean-periodicity にも関係している.

## 3. 二次元ゼータ積分のその後の発展

現在時点では楕円曲線 $E/k$ の Hasse–Weil $L$ 関数 $L(E,s)$ の解析接続と関数等式は $k=\mathbb{Q}$ の場合か, $E/k$ が虚数乗法を持つ場合位しか証明されていない. $k=\mathbb{Q}$ の場合は $E/\mathbb{Q}$ が modular である事の帰結だが, $E/\mathbb{Q}$ が modular である事を証明するのは大仕事であるし, その証明の際 Wiles 等が用いた方法は直ちに一般の代数体 $k$ に拡張できるものではない. $E/k$ の modular 性を経由せずに $L(E,s)$ の解析接続と関数等式を得る方法はないだろうか？

二次元ゼータ積分の理論はこの問いに対する一つのヒントを与えてくれる. Dedekind ゼータ関数の解析接続と関数等式が既知である事から, (1.1) により $\zeta_{\mathcal{E}}(s)$ の解析接続と関数等式は $L(E,s)$ の解析接続と関数等式を導く. 一方, $\zeta_{\mathcal{E}}(s)$ は二次元ゼータ積分で表されたから, $\omega_f(s)$ の解析接続と関数等式が得られれば, それは $L(E,s)$ の解析接続と関数等式を導く. もし $\omega_f(s)$ が $\mathbb{C}$ へ解析接続される為の boundary term $h_f(x)$ $(x\in\mathbb{R}_+^{\times})$ に関する十分条件が $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ 上の調和解析の言葉で記述できれば非常に興味深い.

$\omega_f(s)$ が $\mathbb{C}$ へ解析接続される為の十分条件として, Fesenko は [2] で $h_f(x)$ が mean-periodic function であるという条件を提案した. 関数 $F$ が mean-periodic function であるとは, $F$ が属する関数空間の双対空間に属する $G\neq 0$ に対して $F*G=0$ ($*$ は適当な意味での合成積) である事を意味する. この考えは [11] でより詳細に検討され, 一般の数論的 scheme のゼータ関数と mean-periodic functions の対応へ拡張されて考察されている. 但し mean-periodic function の理論と $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ 上の調和解析の関係には未だ解決すべき点が多く, $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ 上の調和解析から $\zeta_{\mathcal{E}}(s)$ の解析接続と関数等式を導くには至っていない. 今後の発展に期待したい.

一方, もし $E/k$ が modular であると仮定すれば, $E/k$ に対応する $GL_2(\mathbb{A}_k)$ の保型表現の表現空間とある $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}^{\times}\times\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}^{\times}$ 上の関数空間が双対的な関係にある事が観察される ([9]). この様な $\mathbb{A}_k$ 上の理論と $\mathbb{A}_{\mathcal{E},S}$ 上の理論の関係は今後の研究において重要かつ興味深い視点だと思われる.

## References


1. Ivan Fesenko, *Analysis on arithmetic schemes. II*, (2006), prepublication, available at http://www.maths.nott.ac.uk/personal/ibf/a2.pdf.
2. ———, *Adelic approach to the zeta function of arithmetic schemes in dimension two*, (2007), to appear in Moscow Math. Journal, 8 (2008), available at http://www.maths.nott.ac.uk/personal/ibf/ade.pdf.
3. Steven M. Gonek, *On negative moments of the Riemann zeta-function*, Mathematika **36** (1989), no. 1, 71–88. MR MR1014202 (90g:11114)
4. Dennis A. Hejhal, *On the distribution of* $\log|\zeta'(\frac{1}{2}+it)|$, Number theory, trace formulas and discrete groups (Oslo, 1987), Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 343–370. MR MR993326 (90j:11085)
5. Yuri Ivanovic Manin and Alexei A. Panchishkin, *Introduction to modern number theory*, second ed., Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 49, Springer-Verlag, Berlin, 2005, Fundamental problems, ideas and theories, Translated from the Russian. MR MR2153714 (2006j:11002)
6. Carlos Julio Moreno, *Advanced analytic number theory: L-functions*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 115, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. MR MR2135107 (2006f:11096)
7. M. Ram Murty and Alberto Perelli, *The pair correlation of zeros of functions in the Selberg class*, Internat. Math. Res. Notices (1999), no. 10, 531–545. MR MR1692847 (2000g:11086)
8. Michael Rubinstein, *Zeros of L-functions*, the $L$-function software and zeros/values database, available at http://pmmac03.math.uwaterloo.ca/~mrubinst/L_function_public/zeros.
9. Masatoshi Suzuki, *Two dimensional adelic analysis and cuspidal automorphic representations of* GL(2), prepublication, February 2008.
10. ———, *Nonpositivity of certain functions associated with analysis on elliptic surface*, (2007), prepublication available at http://arxiv.org/abs/math/0703052.
11. Masatoshi Suzuki, Guillaume Ricotta, and Ivan Fesenko, *Mean-periodicity and zeta functions*, prepublication, March 2008.
12. J. T. Tate, *Fourier analysis in number fields, and Hecke's zeta-functions*, Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965), Thompson, Washington, D.C., 1967, pp. 305–347. MR MR0217026 (36 #121)



Masatoshi Suzuki,
Department of Mathematics
Rikkyo University
Nishi-Ikebukuro, Toshima-ku
Tokyo 171-8501,
Japan
suzuki@rkmath.rikkyo.ac.jp